УДК 681.586.69

В.А. Пахотин, С.В. Молостова,
М.А. Никитин, А.С. Чугайнов

РАЗРЕШАЮЩАЯ СПОСОБНОСТЬ ОПТИЧЕСКИХ ПРИБОРОВ

Представлены результаты обработки дифракционных изображений точечных источников методом максимального правдоподобия. Показано, что разрешение двух точечных источников может быть лучше, чем рэлеевское. Представлены результаты модельных расчетов.

Results of processing of diffraction images of dot sources are presented by a method of the maximum credibility. It is shown that the permission of two dot sources can be better, than the Releevsky permission. Results of modeling calculations are presented.

Ключевые слова: оптические приборы, дифракция, теория оптимального приема, разрешающая способность, критерий Рэлея.

Key words: optic instruments, diffraction, theory of optimum reception, resolution capability, Rayleigh criterion.

Разрешающая способность оптических приборов ограничена явлением дифракции света. В ее результате на входном зрачке оптической системы точечный источник света преобразуется в протяженный объект — дифракционное распределение света. Ширина главного максимума определяется известным выражением.

$$\theta \approx 0,61\frac{\lambda}{R}, \tag{1}$$

где λ-длина волны, R-радиус входного зрачка оптической системы [1].

При наличии двух точечных источников света, согласно критерию Рэлея, их главные дифракционные максимумы будут наблюдаться раздельно, если угловое различие точечных источников $\Delta\varphi \geq 0,61\lambda$. Этим условием определяется разрешающая способность микроскопов, телескопов, глаза человека, т.е. всех оптических приборов, световой поток которых ограничен входным зрачком.

В настоящей работе рассмотрена теория оптических приборов с точки зрения метода максимального правдоподобия [2]. При этом решаются две задачи. Первая связана с оценкой углового положения одного точечного источника света φ_0 и его амплитуды по дифракционному распределению поля при известных значениях радиуса отверстия и длины волны. Определяется также дисперсия параметра φ_0. Во второй задаче оценивается угловое различие между двумя точечными источниками света и их амплитуды по дифракционному распределению светового поля. Принято, что дифракционные распределения света от разных источников складываются аддитивно, без учета фазовых зависимостей.

Рассмотрим явление дифракции точечного источника света на круглом отверстии радиуса R. Длина волны светового потока равна λ. В этом случае напряженность светового поля в зависимости от угла дифракции q определяется известным соотношением

$$U(q) = U_0 \frac{2J_1\left(kR\sin\left(q - q_0\right)\right)}{\left(kR\sin\left(q - q_0\right)\right)} + U_ш(q), \tag{2}$$

где U_0 — амплитуда напряженности поля, $q_0 = j_0$ — угловое положение точечного источника света, $J_1\left(kR\sin\left(q - q_0\right)\right)$ — функция Бесселя первого порядка, $U_ш(q)$ — шумовая добавка, которая характеризуется нормальным распределением с дисперсией S^2 и средним значением, равным нулю [1]. Запишем на основании выражения (2) логарифм функции правдоподобия [2]:

$$\ln\left(L\left(\theta_0', U_0'\right)\right) = -\frac{1}{2\sigma^2\tau_k}\int_{-\tau}^{\tau}\left|U(\theta) - U_0\frac{2J_1\left(kR\sin\left(\theta - \theta_0'\right)\right)}{\left(kR\sin\left(\theta - \theta_0'\right)\right)}\right|^2 d\theta. \tag{3}$$

Учитывая, что он является выпуклой функцией, продифференцируем выражение (3) по амплитуде U_0 и приравняем нулю. В результате получим

$$U_0'\left(\theta_0'\right) = \frac{\int_{-\tau}^{\tau} U(\theta) f\left(\theta, \theta_0'\right) d\theta}{\int_{-\tau}^{\tau}\left|f\left(\theta, \theta_0'\right)\right|^2 d\theta}, \tag{4}$$

где $f\left(\theta, \theta_0'\right) = \frac{2J_1\left(kR\sin\left(\theta - \theta_0'\right)\right)}{\left(kR\sin\left(\theta - \theta_0'\right)\right)}$.

Математическое ожидание от решения выражения (4) будет:

$$M\left(U_0'\right) = U_0 \frac{\int_{-\tau}^{\tau} f\left(\theta, \theta_0\right) f\left(\theta, \theta_0'\right) d\theta}{\int_{-\tau}^{\tau}\left|f\left(\theta, \theta_0'\right)\right|^2 d\theta}. \tag{5}$$

Оценим дисперсию параметров. Для этого получим двумерную информационную матрицу Фишера по выражению [3].

$$J_{ij} = -M\left(\frac{d\left(\lg\left(L\left(\vec{a}\right)\right)\right)}{da_i da_j}\right), \tag{6}$$

где $a^{-T} = \left(U_0', \theta_0'\right)$ — вектор параметров сигнала.

В результате двойного дифференцирования логарифма функции правдоподобия, согласно (6), получим информационную матрицу Фишера:

$$\hat{J} = \frac{1}{\sigma^2 \tau_k} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \tag{7}$$

где

$$a_{11} = \int_{-\tau}^{\tau} f^2(\theta, \theta_0') d\theta;\ a_{12} = a_{21} = \int_{-\tau}^{\tau} f(\theta, \theta_0') \frac{d(f(\theta, \theta_0'))}{d\theta_0'} d\theta;$$

$$a_{22} = \int_{-\tau}^{\tau} \left(\frac{d(f(\theta, \theta_0'))}{d\theta_0'} \right)^2 d\theta.$$

Вычисляя диагональные элементы матрицы, обратной к информационной матрице Фишера, получим дисперсию амплитуды D_U и дисперсию углового положения точечного источника D_q.

Точечный источник расположен под углом 20°. Полуширина дифракционного пятна определяется первым нулевым значением и согласно выражению (1) равна 2,33°, что отражено на рисунке 1.

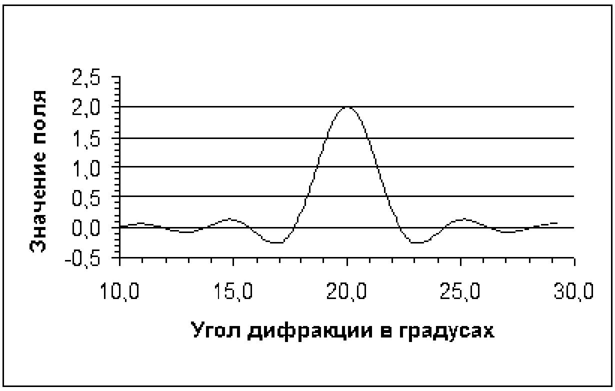

Рис. 1. Зависимость дифракционного распределения света от точечного источника от угла дифракции

На рисунке 2 показана производная функции по углу дифракции. Модуль производной функции часто используется вместо самой функции для более точной оценки углового положения точечного источника по минимуму.

В качестве примера можно привести пеленгационную характеристику при пеленгации разностным методом [2]. Она часто применяется для слежения за пеленгом. Если ввести нормированный коэффициент корреляции $r = \frac{a_{12}}{(a_{11} a_{22})}$, то можно получить дисперсию амплитуды и дисперсию углового положения точечного источника света в виде

$$D_U = \frac{S^2 t_k}{a_{11}(1 - r^2)};\ D_q = \frac{S^2 t_k}{a_{22}(1 - r^2)}. \tag{8}$$

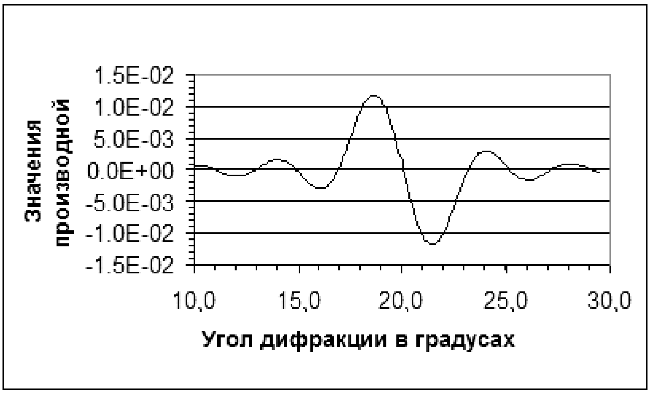

Рис. 2. Производная функции по углу дифракции

По аналогии с сигналами в радиотехнике [2; 3] a_{11} и a_{22} имеют смысл обобщенной энергии. Следовательно, дисперсии D_U и D_q зависят от отношения «сигнал/шум» и от коэффициента корреляции между функцией и ее производной.

Таким образом, метод максимального правдоподобия позволяет дать оценку углового положения точечного источника света. Эта оценка не зависит от размера дифракционного пятна. Она определяется с точностью, определяемой дисперсией углового положения источника света. Вместо дифракционного пятна (протяженного объекта) в результате данной обработки можно получить точечное изображение, угловое положение которого случайно и характеризуется дисперсией. Эффект дифракции, который можно отождествить с аппаратной функцией оптических приборов, может быть исключен. Контуры протяженных объектов могут быть уточнены до значений дисперсии.

Рассмотрим случай дифракции двух точечных источников света на круглом отверстии радиуса R. В этом случае распределение света в зависимости от угла дифракции будет представлено в виде суммы двух дифракционных распределений:

$$U(\theta) = U_1 \frac{2J_1\left(kR\sin\left(\theta-\theta_1'\right)\right)}{\left(kR\sin\left(\theta-\theta_1'\right)\right)} + U_2 \frac{2J_1\left(kR\sin\left(\theta-\theta_2'\right)\right)}{\left(kR\sin\left(\theta-\theta_2'\right)\right)} + U_ш(\theta), \tag{9}$$

где q_1, q_2 — угловые положения точечных источников света, U_1, U_2 — их амплитудные значения. Обозначим

$$f_1\left(\theta,\theta_1'\right) = \frac{2J_1\left(kR\sin\left(\theta-\theta_1'\right)\right)}{\left(kR\sin\left(\theta-\theta_1'\right)\right)};\ f_2\left(\theta,\theta_1'\right) = \frac{2J_1\left(kR\sin\left(\theta-\theta_2'\right)\right)}{\left(kR\sin\left(\theta-\theta_2'\right)\right)} \tag{10}$$

и запишем логарифм функции правдоподобия на основании (9).

Дифференцируя и приравнивая дифференциалы к нулю, получим систему уравнений.

$$\begin{aligned} &\overline{U(\theta) f_1\left(\theta,\theta_1'\right)} = U_1'\overline{f_1^2\left(\theta,\theta'\right)} + U_2'\overline{f_1\left(\theta,\theta_1'\right) f_2\left(\theta,\theta_2'\right)}, \\ &\overline{U(\theta) f_2\left(\theta,\theta_2'\right)} = U_1'\overline{f_1\left(\theta,\theta_1'\right) f_2\left(\theta,\theta_2'\right)} + U_2'\overline{f_1^2\left(\theta,\theta'\right)} \end{aligned}. \tag{11}$$

Черта сверху означает интегрирование по параметру q. Решим эту систему:

$$U_1' = \frac{\overline{U(\theta) f_1(\theta,\theta_1')}\,\overline{f_2^2(\theta,\theta_2')} - R_1 \overline{U(\theta) f_2(\theta,\theta_2')}}{\overline{f_1^2(\theta,\theta_1')}\,\overline{f_2^2(\theta,\theta_2')} - R_1^2},$$
$$U_1' = \frac{\overline{U(\theta) f_2(\theta,\theta_2')}\,\overline{f_1^2(\theta,\theta_1')} - R_1 \overline{U(\theta) f_1(\theta,\theta_1')}}{\overline{f_1^2(\theta,\theta_1')}\,\overline{f_2^2(\theta,\theta_2')} - R_1^2} \qquad (12)$$

Если угловое различие между дифракционными максимумами удовлетворяет соотношению

$$\Delta\theta = |\theta_2' - \theta_1'| \geq 0,61\frac{\lambda}{R}, \qquad (13)$$

то коэффициент корреляции близок к нулю и решения уравнения (13) совпадают с классическими решениями:

$$U_1' = \frac{\overline{U(\theta) f_1(\theta,\theta_1')}}{\overline{f_1^2(\theta,\theta_1')}}, U_2' = \frac{\overline{U(\theta) f_2(\theta,\theta_2')}}{\overline{f_2^2(\theta,\theta_2')}}.$$

Если угловое различие меньше, чем определено в условии (13), то, согласно классическим представлениям (критерий Рэлея), светящиеся точки сливаются вместе. Коэффициент корреляции в этом случае будет отличен от нуля. Однако решения (12) и в этом случае дают более точные оценки угловых положений двух светящихся точек. Решения находятся по значению поверхности функционала Δ в двумерном пространстве углов θ_1' и θ_2'. Функционал Δ определяется выражением и зависит от амплитуд и угловых положений источников света. Перебирая все значения углов θ_1' и θ_2', получим полную поверхность функционала. Минимум этой поверхности определяет решения, т.е. оценочные значения амплитуд U_1' и U_2' и углов θ_1' и θ_2' двух точечных источников. Решения (12) несмещенные. Они учитывают взаимную корреляцию между дифракционными максимумами двух светящихся точек и дают более точные значения их угловых положений.

Оценим дисперсии углового положения двух светящихся точек и их амплитудных значений напряженности поля. Для этого дважды продифференцируем логарифм функции правдоподобия. Получим элементы информационной матрицы Фишера:

$$\hat{J} = \frac{1}{\sigma^2 \tau_k}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \qquad (14)$$

где $a1_{11} = \overline{f_1^2(\theta,\theta_1')}$; $a1_{12} = a1_{21} = \overline{f_1(\theta,\theta_1') f_2(\theta,\theta_2')} = R1$; $a1_{22} = \overline{f_2^2(\theta,\theta_2')}$.

Определяя диагональные элементы матрицы, обратной к информационной матрице Фишера, получим дисперсии амплитуд света от первой и второй точек D_{U1}, D_{U2}.

$$D_{U1}=\frac{a1_{22}S^2t_k}{a1_{11}a1_{22}-R1^2},D_{U2}=\frac{a1_{11}S^2t_k}{a1_{11}a1_{22}-R1^2}. \quad (15)$$

Аналогично можно получить дисперсии угловых положений светящихся точек D_{q1},D_{q2}. В этом случае информационная матрица Фишера будет

$$\hat{J}_2=\frac{1}{\sigma^2\tau_k}\begin{pmatrix}a2_{11} & a2_{12}\\ a2_{21} & a2_{22}\end{pmatrix},$$

где

$$a2_{11}=U_1'^2\overline{\left(\frac{df_1(\theta,\theta_1')}{d\theta_1'}\right)^2},\ a2_{22}=U_2'^2\overline{\left(\frac{df_2(\theta,\theta_2')}{d\theta_2'}\right)^2},$$

$$a2_{12}=a2_{21}=R2=U_2'U_1'\overline{\left(\frac{df_1(\theta,\theta_1')}{d\theta_1'}\frac{df_2(\theta,\theta_2')}{d\theta_2'}\right)}.$$

Определяя диагональные элементы обратной матрицы, получим

$$D_{\theta1}=\frac{a2_{22}\sigma^2\tau_k}{U_1'^2\left(a1_{11}a1_{22}-R2^2\right)},D_{\theta2}=\frac{a2_{11}\sigma^2\tau_k}{U_2'^2\left(a1_{11}a1_{22}-R2^2\right)}.$$

Таким образом, дисперсия угловых положений светящихся точек зависит от отношений «сигнал/шум» и взаимной корреляции дифракционных максимумов. Дисперсии будут минимальны, когда $R2 = 0$. Однако, если отношение «сигнал/шум» достаточно большое (более 20 дБ), при приемлемых дисперсиях коэффициент корреляции может достигать значения 0,9 и выше. Это сильно перекрывающиеся дифракционные максимумы.

Предварительные модельные расчеты проведены с целью иллюстрации принципиальной возможности получения более точного решения задачи разрешения двух точечных источников света по их дифракционным изображениям, чем это следует из работы [1]. Принято следующее. Амплитуды напряженности поля от точечных источников света равны 2 и 1,5. Угловое положение первого из них 20°, второго — меняется в пределах от 26 до 21°. Отношение «сигнал/шум» равно 30 дБ, радиуса отверстия к длине волны $R/\lambda = 15$. Обработка дифракционного распределения поля проводилось согласно классическим представлениям. Это соответствует методу Фурье с рэлеевским ограничением на разрешение двух светящихся точек. Вместе с тем обработка дифракционного распределения поля проводилось и по методу максимального правдоподобия (табл.).

Как видно из таблицы, благодаря методу максимального правдоподобия можно решить данную задачу вплоть до угла $\varphi_2 = 21{,}5°$ и, в принципе, эта возможность зависит от отношения «сигнал/шум». Метод Фурье позволяет решить задачу практически лишь до угла $\varphi_2 = 24°$ вне зависимости от отношения «сигнал/шум».

Таблица 1

Сравнение работы ММП и метода Фурье при решении дифракционной задачи

Модельное, значение, φ_2	Метод максимального правдоподобия				Метод Фурье			
	U_1	U_2	φ_1	φ_2	U_1	U_2	φ_1	φ_2
26,0	1,97	1,47	20,0	26,0	2,0	1,51	20,0	25,9
25,0	1,97	1,48	20,0	25,0	1,99	1,51	20,0	25,1
24,0	1,97	1,5	20,0	24,0	1,9	1,41	19,9	24,1
23,0	1,97	1,52	20,0	23,0	1,93	–	20,8	–
22,0	1,96	1,52	20,0	22,0	2,67	–	20,8	–
21,5	2,22	1,28	19,9	21,7	2,98	–	20,6	–
21,0	3,03	0,4	19,7	21,9	–	–	–	–

На рисунке 3 показана поверхность обратного функционала $D = 1/\varDelta$, зависящая от значений углов $F1 = \theta_1'$ и $F2 = \theta_2'$. Максимум обратного функционала определяет решение. По одному максимуму оцениваются одновременно два значения угловых положений светящихся точек. Необходимости введения термина «разрешение (разрешающая способность)» в методе максимального правдоподобия нет. В методе же Фурье каждой светящейся точке соответствует свой максимум и возникает задача их разрешения.

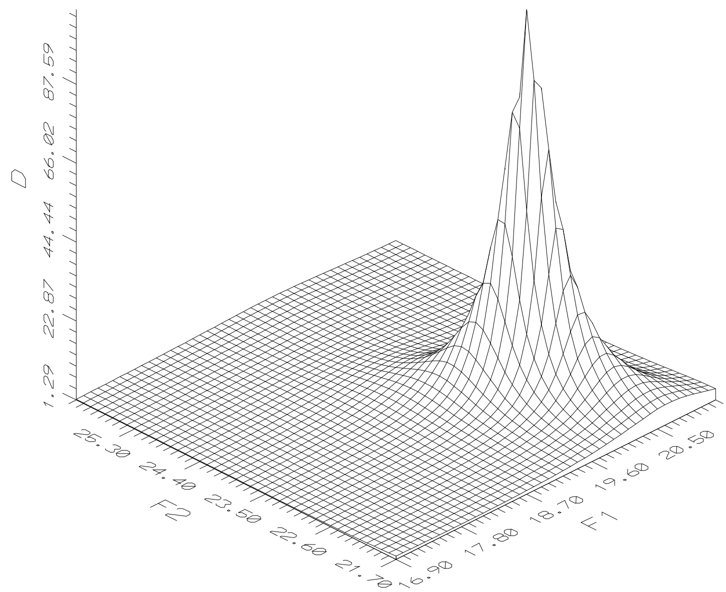

Рис. 3. Вид обратного функционала

В настоящей работе представлено решение задач оценки параметров и разрешения подобных сигналов в области дифракции света на круглом отверстии (входном зрачке оптических приборов). Решения получены методом максимального правдоподобия. Угловое положение точечного источника света в новом методе решения позволяет исключить дифракционное пятно. Точечный источник преобразуется в точечный со случайным распределением углового положения, которое оценивается дисперсией, а не угловым размером. В результате границы светящихся областей будут определяться с большей точностью.

Разрешающая способность при цифровой обработке дифракционных максимумов, полученных от двух светящихся точек методом максимального правдоподобия, может быть увеличена по сравнению с рэлеевской разрешающей способностью. Ограничение на разрешение точек в новом решении связано с отношением «сигнал/шум». Новое решение задачи углового разрешения двух светящихся точек имеет большое значение для цифровых оптических систем: телескопов, микроскопов.

Список литературы

1. *Сивухин Д. В.* Оптика. М., Наука, 1980.

2. *Пахотин В. А., Бессонов В. А., Молостова С. В., Власова К. В.* Теоретические основы оптимальной обработки сигналов : курс лекций для радиофизических специальностей. Калининград, 2008.

3. *Перов А. И.* Статистическая теория радиотехнических систем : учебное пособие для вузов. М., 2003.

Об авторах

Валерий Анатольевич Пахотин — д-р физ.-мат. наук, проф., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград.
E-mail: VPakhotin@kantiana.ru

Светлана Валерьевна Молостова — канд. физ.-мат. наук, доц., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград.
E-mail: p_ksenia@mail.ru

Михаил Анатольевич Никитин — д-р физ.-мат. наук, проф., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград.
E-mail: MNikitin@kantiana.ru

Александр Сергеевич Чугайнов — асп., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград.
E-mail: p_ksenia@mail.ru

About authors

Valery Pakhotin — Dr, professor, I. Kant Baltic Federal University, Kaliningrad.
E-mail: VPakhotin@kantiana.ru

Svetlana Molostova — PhD, associate professor, I. Kant Baltic Federal University, Kaliningrad.
E-mail: p_ksenia@mail.ru

Mikhail Nikitin — Dr, professor, I. Kant Baltic Federal University, Kaliningrad.
E-mail: MNikitin@kantiana.ru

Alexander Chygainov — PhD student, I. Kant Baltic Federal University, Kaliningrad.
E-mail: p_ksenia@mail.ru